Срок сдачи: 24.12.2015 (через старост групп, комн. 715)

Для группы 203

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 (1)

## Подвариант № 1

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ИЛИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Цель работы**

освоить методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, применяемые для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) первого порядка.

**Постановка задачи**

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной и имеющее вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ x_0 < x, \tag{1}$$

с дополнительным начальным условием, заданным в точке $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Предполагается, что правая часть уравнения (1) функция $f = f(x, y)$ такова, что гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (1)-(2).

В том случае, если рассматривается не одно дифференциальное уравнение вида (1), а система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций, то соответствующая задача Коши имеет вид (на примере двух дифференциальных уравнений):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \ x > x_0. \end{cases} \tag{3}$$

Дополнительные (начальные) условия задаются в точке $x = x_0$:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \ y_2(x_0) = y_2^{(0)}. \tag{4}$$

Также предполагается, что правые части уравнений из (3) заданы так, что это гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (3)-(4), но уже для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме, разрешенной относительно производных неизвестных функций.

Заметим, что к подобным задачам сводятся многие важные задачи, возникающие в механике (уравнения движения материальной точки), небесной механике, химической кинетике, гидродинамике и т.п.

## Цели и задачи практической работы

1) Решить задачу Коши (1)-(2) (или (3)-(4)) наиболее известными и широко используемыми на практике методами Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, аппроксимировав дифференциальную задачу соответствующей разностной схемой (на равномерной сетке); полученное конечно-разностное уравнение (или уравнения в случае системы), представляющее фактически некоторую рекуррентную формулу, просчитать численно;
2) Найти численное решение задачи и построить его график;
3) Найденное численное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-line системы http://www.wolframalpha.com или пакета Maple и т.п.).

## Отчет по практической работе

Отчет должен содержать

- титульный лист (образец прилагается);
- описание постановки задачи и ее целей;
- описание метода (алгоритма) решения;
- описание программы и ее оригинальный текст с комментариями;
- тесты, доказывающие корректность работы программы (не менее 3-5 тестов, проверенных непосредственно вручную или с помощью специализированного программного обеспечения.

## Варианты заданий

### Таблица 1.

Варианты задания правой части уравнения (1) и начального условия (2)

в случае одного дифференциального уравнения

| Вариант | $f(x,y)$ | $(x_0, y_0)$ | Точное решение $y = y(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $3 - y - x$ | (0,0) | $4 - x - 4e^{-x}$ |
| 2 | $\sin(x) - y$ | (0,10) | $-0.5\cos(x) + 0.5\sin(x) + \frac{21}{2}e^{-x}$ |
| 3 | $-y - x^2$ | (0,10) | $-x^2 + 2x - 2 + 12e^{-x}$ |
| 4 | $y - yx$ | (0,5) | $5e^{-\frac{1}{2}x(-2+x)}$ |
| 5 | $(y - y^2)x$ | (0,3) | $\dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x^2}}$ |
| 6 | $(x - x^2)y$ | (0,1) | $e^{-\frac{1}{6}x^2(-3+2x)}$ |

### Таблица 2.

Варианты задания правых частей системы (3) и начального условия (4)

в случае системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

| Вариант | $f_1(x,u,v)$ | $f_2(x,u,v)$ | $x_0$ | $y_1^{(0)}$ | $y_2^{(0)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{u-v}{x}$ | $\dfrac{u+v}{x}$ | 1 | 1 | 1 |
| 2 | $x \cdot u + v$ | $u - v$ | 0 | 0 | 1 |
| 3 | $x + v^2$ | $x \cdot u$ | 0 | 1 | -1 |
| 4 | $\sqrt{x^2 + 1.1 \cdot u^2} + v$ | $\cos(2.1 \cdot v) + u$ | 0 | 0.5 | 1 |
| 5 | $\cos(u + 1.1 \cdot v) + 2.1$ | $\dfrac{1.1}{x + 2.1 \cdot u^2} + x + 1$ | 0 | 1 | 0.05 |
| 6 | $\sin(1.1 \cdot u^2) + x + v$ | $x + u - 2.1 \cdot v^2 + 1$ | 0 | 1 | 0.5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | $\sin(x+u)+1.1\cdot v$ | $2.1\cdot u-(x+v)^2$ | 0 | 0.5 | 1 |
| 8 | $\cos(x+1.1\cdot v)+u$ | $-v^2+2.1\cdot u+1.1$ | 0 | 0.25 | 1 |
| 9 | $2.1\cdot v-u^2$ | $e^{-u}+x+2.1\cdot v$ | 0 | 1 | 0.25 |
| 10 | $v-\cos(x)$ | $u+\sin(x)$ | 0 | 0 | 0 |
| 11 | $\sin(2\cdot u^2)+x+v$ | $x+u-2\cdot v^2+1$ | 0 | 1 | 0.5 |
| 12 | $-2\cdot x\cdot u^2+v^2-x-1$ | $\dfrac{1}{v^2}-u-\dfrac{x}{u}$ | 0 | 1 | 1 |
| 13 | $\ln(2\cdot x+\sqrt{4\cdot x^2+v^2})$ | $\sqrt{4\cdot x^2+u^2}$ | 0 | 0.5 | 1 |
| 14 | $e^{-(u^2+v^2)}+2\cdot x$ | $2\cdot u^2+v$ | 0 | 0.5 | 1 |
| 15 | $\sqrt{x^2+1.2\cdot u^2}-v$ | $\cos(2.2\cdot v)+u$ | 0 | 0.5 | 1 |
| 16 | $\cos(u+1.3\cdot v)-2.1$ | $\dfrac{1.3}{x+2.3\cdot u^2}+x+1$ | 0 | 1 | 0.05 |
| 17 | $\sin(1.4\cdot u^2)-x+v$ | $x+u-2.2\cdot v^2+1$ | 0 | 1 | 0.5 |
| 18 | $\cos(x+1.5\cdot v)-u$ | $-v^2+2.3\cdot u-1.2$ | 0 | 0.25 | 1 |
| 19 | $\sin(x+u)-1.1\cdot v$ | $2.5\cdot u-(x+v)^2$ | 0 | 0.5 | 1 |
| 20 | $x+u-\cdot v^2+2$ | $\sin(x-u)+2.1\cdot v$ | 0 | 1.5 | 0 |
| 21 | $2.4\cdot v-u$ | $e^{-u}-x+2.2\cdot v$ | 0 | 1 | 0.25 |

# ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 (2)

## Подвариант № 2

## РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

**Цель работы**

освоить метод прогонки решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

**Постановка задачи**

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = -f(x),\ 1 < x < 0, \qquad (1)$$

с дополнительными условиями в граничных точках

$$\begin{cases} \sigma_1 y(0) + \gamma_1 y'(0) = \delta_1, \\ \sigma_2 y(1) + \gamma_2 y'(1) = \delta_2. \end{cases} \qquad (2)$$

**Цели и задачи практической работы**

1) Решить краевую задачу (1)-(2) методом конечных разностей, аппроксимировав ее разностной схемой второго порядка точности (на равномерной сетке); полученную систему конечно-разностных уравнений решить методом прогонки;
2) Найти разностное решение задачи и построить его график;
3) Найденное разностное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения (подобрать специальные тесты, где аналитические решения находятся в классе элементарных функций, при проверке можно использовать ресурсы on-line системы http://www.wolframalpha.com или пакета Maple и т.п.).

**Отчет по практической работе**

Отчет должен содержать

- титульный лист (образец прилагается);
- описание постановки задачи и ее целей;
- описание метода (алгоритма) решения;
- описание программы и ее оригинальный текст с комментариями;

- тесты, доказывающие корректность работы программы (не менее 3-5 тестов, проверенных непосредственно вручную или с помощью специализированного программного обеспечения.

**Варианты заданий**

| | | |
|---|---|---|
| 1. $y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$ ; | $y(0.7) = 0.5$ ; | $2y(1) + 3y'(1) = 1.2$ . |
| 2. $y'' - xy' + 2y = x \neg 1$ ; | $y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 2$ ; | $y(1.2) = 1$ . |
| 3. $y'' + xy' + y = x + 1$ ; | $y(0.5) + 2y'(0.5) = 1$ ; | $y'(0.8) = 1.2$ . |
| 4. $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$ ; | $y(0.2) = 2$ ; | $0.5y(0.5) - y'(0.5) = 1$ . |
| 5. $y'' + 2y' - xy = x^2$ ; | $y'(0.6) = 0.7$ ; | $y(0.9) - 0.5y'(0.9) = 1$ . |
| 6. $y'' - y' + \frac{2y}{x} = x + 0.4$ ; | $y(1.1) - 0.5y'(1.1) = 2$ ; | $y'(1.4) = 4$ . |
| 7. $y'' - 3y' - \frac{1}{x} = 1$ ; | $y(0.4) = 2$ ; | $y(0.7) - 2y'(0.7) = 0;7$ . |
| 8. $y'' + 3y' - \frac{y}{x} = x + 1$ ; | $y'(1.2) = 1$ ; | $2y(1.5) - y'(1.5) = 0.5$. |
| 9. $y'' - \frac{y'}{2} 3y = 2x^2$ ; | $y(1) - 2y'(1) = 0.6$ ; | $y(1.3) = 1$ . |
| 10. $y'' + 1.5y' - xy = 0.5$ ; | $2y(1.3) - y'(1.3) = 1$ ; | $y(1.6) = 3$ . |
| 11. $y'' + 2xy' - y = 0.4$ ; | $2y(0.3) + y'(0.3) = 1$ ; | $y'(0.6) = 2$ . |
| 12. $y'' - 0.5xy' + y = 2$ ; | $y(0.4) = 1.2$ ; | $y(0.7) + 2y'(0.7) = 1.4$ |
| 13. $y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2$; | $y'(0.8) = 1.5$ ; | $2y(1.1) - y'(1.1) = 3$. |
| 14. $y'' + 2x^2 y' + y = x$ ; | $2y(0.5) - y'(0.5) = 1$ ; | $y(0.8) = 3$ . |
| 15. $y'' - 3xy' + 2y = 1.5$ ; | $y'(0.7) = 1.3$ ; | $0.5y(1) + y'(1) = 2$ . |

Образец оформления титульного лист.

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**имени М.В.Ломоносова**

**Факультет вычислительной математики и кибернетики**

## Компьютерный практикум по курсу

## «ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

# ЗАДАНИЕ № 2.

## Численные методы решения дифференциальных уравнений

## ОТЧЕТ

**о выполненном задании**

студента _____ учебной группы факультета ВМК МГУ

_______________________________________________

(фамилия, имя, отчество)

Москва, 2015 г.

# ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

**Практическое задание № 2. Численные методы решения дифференциальных уравнений.**

**Группа 203**

| п/п | ФИО студента | Вариант Задания № 2 |
|---|---|---|
| 1 | АГРАНОВСКИЙ МИХАИЛ ЛЕОНИДОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 5, табл 2 - 4; Подвариант 2 (краевая задача): 15 |
| 2 | БАЙТЕКОВ НИКИТА ВЯЧЕСЛАВОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 10; Подвариант 2 (краевая задача): 8 |
| 3 | БУГАЕВ СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 4 табл 2 - 13; Подвариант 2 (краевая задача): 9 |
| 4 | ДОНСКИХ ДМИТРИЙ ЮРЬЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 17; Подвариант 2 (краевая задача): 9 |
| 5 | ДОРОЖКИН ДЕНИС СЕРГЕЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 14; Подвариант 2 (краевая задача): 10 |
| 6 | ЗЕЛЕНСКИЙ СЕРГЕЙ КОНСТАНТИНОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 12; Подвариант 2 (краевая задача): 9 |
| 7 | КОРНЕЕВА ИРИНА АЛЕКСАНДРОВНА | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 18; Подвариант 2 (краевая задача): 5 |
| 8 | КУРИЛИН ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 19; Подвариант 2 (краевая задача): 2 |
| 9 | ЛАРИЧЕВ НИКИТА МИХАЙЛОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2 табл 2 - 13; Подвариант 2 (краевая задача): 2 |
| 10 | ЛАЩЕНОВА ДАРЬЯ СЕРГЕЕВНА | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 4; Подвариант 2 (краевая задача): 15 |
| 11 | МАРТЫНОВ ОЛЕГ ПАВЛОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 8; Подвариант 2 (краевая задача): 14 |
| 12 | МЕДВЕДЕВ ГЕОРГИЙ ИВАНОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 1, табл 2 - 11; Подвариант 2 (краевая задача): 12 |
| 13 | МЕРЦАЛОВ АЛЕКСАНДР ДМИТРИЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 5, табл 2 - 20; Подвариант 2 (краевая задача): 15 |
| 14 | МУРЫГИН ДМИТРИЙ АЛЕКСЕЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 5, табл 2 - 21; Подвариант 2 (краевая задача): 6 |
| 15 | ОЛЬШАНСКИЙ АЛЕКСАНДР ВАЛЕРЬЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 21; Подвариант 2 (краевая задача): 9 |
| 16 | ПОРТНОЙ АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 17; Подвариант 2 (краевая задача): 5 |
| 17 | СИНДЕЕВА МАРИЯ АНДРЕЕВНА | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 12; Подвариант 2 (краевая задача): 5 |
| 18 | ТЕЛЕГИН КОНСТАНТИН ВЛАДИМИРОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 2, табл 2 - 12; Подвариант 2 (краевая задача): 4 |
| 19 | УМРИХИН АЛЕКСЕЙ ДМИТРИЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 6, табл 2 - 5; Подвариант 2 (краевая задача): 4 |
| 20 | ХАРИТОНОВ ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 1, табл 2 - 9; Подвариант 2 (краевая задача): 15 |
| 21 | ХАЧАТРЯН АРТЕМ ВСЕВОЛОДОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 17; Подвариант 2 (краевая задача): 8 |
| 22 | ЧЕРНЫШЕВ АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 4, табл 2 - 14; Подвариант 2 (краевая задача): 6 |
| 23 | ШАВАЛИЕВА РАЛИНА ЗАБИРОВНА | Подвариант 1 (задача Коши): табл 1 - 3, табл 2 - 8; Подвариант 2 (краевая задача): 7 |